Time Varying Distribution and Dynamic Hedge with Foreign Currency Futures

为什么要套期保值/对冲（hedge）？

用期货价格的变化来抵消现货价格的变化。

原材料套保：对原材料进行套保，为了达到控制成本在可接受的范围之内，锁定利润。

产品套保：对加工产成品进行套保，锁定加工利润。
(希望进货价格，出货价格保持稳定)

汇率套保：利用外汇期货交易，确保外币资产或外币负债的价值不受或少受汇率变动带来的损失。

金融市场对冲：去掉不想承担的风险，保留我们想要的风险。

问题

期货市场毕竟独立于现货市场，其反应的是市场对未来的预期，受种因素的影响，因此在同一时间段内，**期货的波动幅度通常不与现货完全一致**，所以往往难以完美对冲在现货市场的盈亏。

目标：最小化对冲后盈亏的波动范围

- 假设, 对于某种资产，买入1单位现货，卖出b单位期货。一段时间内，现货价格变化了s，期货价格变化了f，那么对冲后的盈亏x为：

$$x = s - bf$$

s 和 f 为随机变量，

$$Var(x) = Var(s) + b^2 \cdot Var(f) - 2bCov(s, f)$$

关于b最小化Var(x):

$$b' = \frac{Cov(s, f)}{Var(f)}$$

- 传统对冲：假定s和f的联合分布不随时间变化，故b' 不随时间变化。
- 但实际上，s 和 f 的分布随时间变化，因此：

$$b_t' = \frac{Cov_t(s_{t+1}, f_{t+1})}{Var_t(f_{t+1})}$$

所以，我们需要预测在t至t+1时刻，s 和 f 的covariance, f 的variance.

Model: Mean Model & Volatility Model

- Mean Model: 对一段时间内期货，现货价格的变化量建模

$$
\begin{aligned}
s_t &= \alpha_{0s} + \alpha_{1s}\left(S_{t-1} - \delta F_{t-1}\right) + \epsilon_{st} \\
f_t &= \alpha_{0f} + \alpha_{1f}\left(S_{t-1} - \delta F_{t-1}\right) + \epsilon_{ft},
\end{aligned}
$$

$(S_{t-1} - \delta F_{t-1})$ 是error correction term（纠错项）

如果两时间序列有谐振关系，那么它们的双变量时间序列模型应当加入纠错项（Engel and Granger 1987）。
由谐振回归得出，δ 约等于1，取之为1.
所以，相当于用过去时刻的基差来预测未来一时间段的价格变化量。

- Volatility Model: 对Mean Model所得误差建模(GARCH(1,1))。

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{st} \\ \epsilon_{ft} \end{bmatrix} \Bigg| \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{ss,t} & h_{sf,t} \\ h_{sf,t} & h_{ff,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{s,t} & 0 \\ 0 & h_{f,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{s,t} & 0 \\ 0 & h_{f,t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} h_{s,t}^2 &= c_s + a_s \epsilon_{s,t-1}^2 + b_s h_{s,t-1}^2 \\ h_{f,t}^2 &= c_f + a_f \epsilon_{f,t-1}^2 + b_f h_{f,t-1}^2, \end{aligned}$$

与三种模型做比较

1. 朴素对冲（Naive Hedging）：现货，期货数量相等
2. 传统对冲： 最佳对冲比不随时间变化
3. 使用带有纠错项的Mean Model, 但Volatility Model为常数

- 在考虑了盈亏变化方差，交易成本，做了in-sample和out-of-sample测试后，新模型表现皆优于其他三种模型。

- 如何把交易成本和盈亏变化方差放在一起评判
  Expected Mean-variance utility function:

$$EU_t(x_{t+1}) = E_t(x_{t+1}) - \gamma \cdot \sigma_t^2(x_{t+1})$$

根据前人的研究，取 γ = 4

- Dynamic Hedge: 在考虑交易费用的情况下，先预判调整对冲比率后，所得效用, 若该效用比不调整对冲比率时所得效用更高，则调整。